EXERCICE 5 :

La production en langue période

La production totale d'une entreprise, exprimée en nombre d'unités produites, est obtenu en combinant deux facteurs de production divisibles, adaptables et partiellement substituables : le travail (L) et le capital (K).

En langue période, l'entreprise peut obtenir un volume de production constant en associant différentes quantités des deux facteurs, la tableau suivant présente quelques-unes des combinaisons d'unités du travail et d'unités du capital relatives à trois volumes de production : PT = (40, 60, 80).

PT = 40	L	8	16	20	25	40	64	100	200	
	K	200	100	80	64	40	25	16	8	
PT = 60	L	20	25	40	50	60	75	96	120	150
	K	180	144	90	72	60	48	37,5	30	24
PT = 80	L	40	50	64	80	100	128	160	200	
	K	160	128	100	80	64	50	40	32	

a- Représente sur un graphique les trois isoquants correspondants au tableau précédent. Commenter (L porté sur l'axe des abscisses et K porté sur l'axe des coordonnées).

b- Définir la notion de taux marginal de substitution technique du travail au capital ($TMST_{LK}$). Comment évolue-t-il le long d'un isoquant ?

c- Le capital et le travail ayant le même prix unitaire : PK = PL = 20, quelle est la solution d'équilibre du producteur qui désir optimiser sa production pour un coût de production égale au budget dont il dispose, soit $C_2 = 2400$.

d- Le prix des facteurs de production n'étant pas modifié, déterminer, à partir des données disponibles, la solution optimale du producteur qui désir produire 60 unités de produit en supportant un coût minimal.

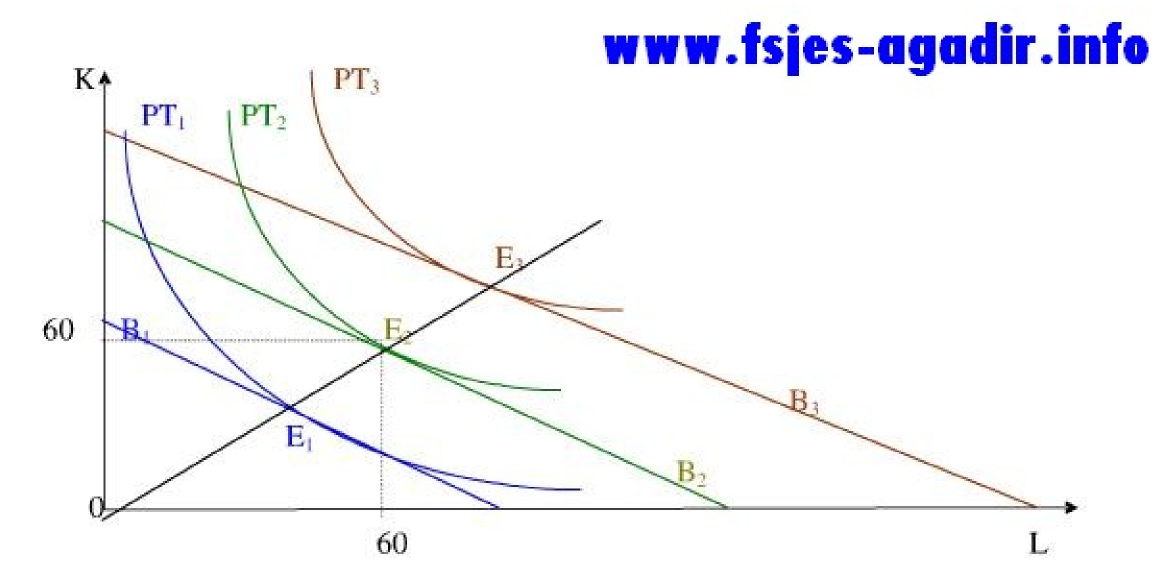
e- Sachant que la fonction de production de l'entreprise est : $PT = L^{0,5} K^{0,5}$, avec L>= 0 et K>= 0, calculer la valeur de TMST au point d'équilibre précédemment déterminé.

f- On considère deux autres valeurs nominales possibles du budget du producteur : $C_1 = 1600$ et $C_3 = 3200$.
* Déterminer graphiquement les solutions d'équilibre qui correspond aux C_1 et C_3 du budget.
* Déterminer mathématiquement la solution d'équilibre déterminée pour C_1 du budget.

g- Définir la notion de sentier d'expansion de l'entreprise et déterminer son équation.
h- Les rendements d'échelle de cette entreprise sont-ils constants ?

Solution de l'exercice n° 5 :

a- Le graphique est le suivant :



- Chaque isoquant est le lieu géométrique des points représentant les différentes combinaisons de quantités des deux facteurs L et K (coordonnées des points) qui permettent d'obtenir un même niveau de production.
Les isoquants présentent les caractéristiques suivantes :
- Plus un isoquant est éloigné de l'origine, plus le volume de production auquel il correspond est important.
- Les isoquants ne peuvent pas se couper : deux isoquants représentent deux ensembles de couples (L, K) de deux volumes de production. S'ils se coupaient, deux volumes de production différents correspondaient à une même combinaison de facteurs, ce qui est impossible.
- Les isoquants sont décroissants ou, plus exactement, seule la partie décroissante des isoquants est considérée par le producteur rationnel. En effet, le respect de l'efficience technique impose que les productivités marginales soient strictement positives ($PmL > 0$ et $PmK > 0$) ; le producteur doit pouvoir obtenir une augmentation du volume de production en employant des quantités croissantes de l'un ou de l'ensemble des facteurs. Le long d'un isoquant, qui correspond à un volume de production constant, l'augmentation de la quantité employée de l'un des facteurs doit nécessairement être compensée par la diminution de l'emploi de l'autre facteur. La partie croissante d'un isoquant doit être écartée puisqu'elle indique qu'un volume constant de production est obtenu pour des quantités croissantes des deux facteurs (utilisation inefficiente de K et L).
Un isoquant, défini de façon continue, admet donc en chacun de ses points une tangente dont la pente est négative ($\frac{dK}{dL} < 0$).
- Les isoquants sont convexes, les facteurs K et L étant partiellement substituables. Le déplacement de haut en bas le long d'un isoquant (substitution du travail au capital) traduit le nécessaire abandon d'une quantité de plus en plus petite de capital par unité supplémentaire de travail.

b- Voir le cours.

c- Le producteur doit réaliser la production totale maximale pour un coût C_2 donné. Il doit, pour cela tenir compte des prix des facteurs établis sue les marchés des facteurs, sont égaux : PK = PL = 20, avec $C_2 = PK \times K + PL \times L = 2400$.

- Cette égalité peut être présentée sous le forme : $K = -\frac{PL}{PK}L + \frac{C_2}{PK}$.

- $K = \frac{-20L}{20} + \frac{1200}{20} = -L + 120$.

- On peut retenir deux points de cette droite : pour L = 0 ⟶ K = 120 ; et pour K = 0 L = 120⟶

- La droite B_2 voir figure 2) passe pat les points de coordonnées (L = 0, K = 120), et (L = 120, K = 0).

- Le producteur doit : choisir l'une des combinaisons (L, K) imposant une dépense égale à C_2 : il doit donc se situer sur le droite B_2. Et obtenir le volume de production le plus grand possible, donc se situer sur l'isoquant le plus éloigné possible de l'origine.

La seule décision compatible avec ces deux impératifs correspond au point de « tangence » qui existe entre la droite B_2 et la deuxième isoquant (PT = 60) : le point E_2 n'est pas proprement parler un points de tangente. Il est le point de contact entre B_2 et l'isoquant PT = 60 : E_2 a pour coordonnées L = K = 60.

d- Si le producteur s'attache à produire 60 unités du produit, il doit obligatoirement choisir l'une des combinaisons (L, K) correspondant à l'un des points du 2ème isoquant. La combinaison de facteurs la moins coûteuse correspond au budget C le plus possible.

On peut déterminer analytiquement le point d'équilibre du producteur. En effet, on ne connaît pas l'équation du facteur de production, mais seulement quelques points. On doit donc déterminer par une méthode graphique le point où l'isoquant est tangent à la droite d'isocoût.

On observe sue la figure 2 que :

- Toutes droites situées à gauche de la droite B_2 ne correspondant pas aux combinaisons (L, K) qui permettent d'atteindre la production, PT = 60.

- Toutes les droites situées à droite de B_2 présentent des points communs avec l'isoquant PT = 60 mais ne peuvent déterminer la solution optimale. Les dépenses auxquelles ces droites correspondent sont, effet, toutes supérieures au budget C_2.

-La droite B_2 est la seule qui corresponde à la solution optimale en son point de « tangence » E_2 avec la deuxième isoquant PT = 60.

e- La valeur du $TMST_{LK}$ au point d'équilibre peut être calculé de différentes façons.

- Calcul de $TMST_{LK}$ à partir de la dérivée de la fonction de l'isoquant, en point d'équilibre E_2. On a $PT = L^{1.5} K^{0.5} = \sqrt{L}\sqrt{K}$.

$$\Rightarrow PT^2 = L.K \Rightarrow K = \frac{PT^2}{L} = \frac{60^2}{L} = \frac{3600}{L}.$$

Or, $TMST_{LK} = \frac{-dK}{dL} = -\left(\frac{3600}{L}\right)' = -\left(-\frac{3600}{L^2}\right) = -\left(-\frac{3600}{60^2}\right) = 1.$

Car on sait que : $\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$.

- Calcul de $TMST_{LK}$ à partir du rapport des prix des facteurs :

La valeur de la pente de $B_2 = \frac{-PL}{PK} = \frac{-20}{20} = -1$.

Or ; $TMST_{LK} = \frac{-dK}{dL} = -\left(\frac{-PL}{PK}\right) = -(-1) = 1$.

- Calcul de $TMST_{LK}$ à partir des productivités marginales de facteurs :

$TMST_{LK} = \frac{-dK}{dL} = \frac{PmL}{PmK}$.

On rappelle que $(ax^{0.5})^1 = 0,5\ ax^{0,5-1}$.

Donc : $PmL = \frac{dPT}{dL} = 0,5.L^{-0,5}K^{0,5}.(1)$

$PmK = \frac{dPT}{dL} = 0,5.L^{-0,5}K^{0,5}.(2)$

D'où au point E_2 : K = 60 et K = 60, on a : $TMST_{LK} = \frac{(1)}{(2)} = \frac{K^{0,5}.K^{0,5}}{L^{0,5}.L^{0,5}} = \frac{K}{L} = \frac{60}{60} = 1$.

f- L'effet de la modification du budget de production sur la solution d'équilibre.

* L'équation générale de ces droites étant : $K = -L + \frac{C}{20}$, on obtient :

- Pour $C_1 = 1600$: $K = -L + \frac{1600}{20} = -L + 8$. Équation de B_1 dont deux points ont pour coordonnées (L = 0, K = 80) et (L = 80, K = 0).

- Pour $C_3 = 3200$, $K = -L + \frac{3200}{20} = -L + 160$. Équation de B_1 dont deux points ont pour coordonnées (L = 0, K = 160) et (L = 160, K = 0).

g- Le sentier d'expansion de l'entreprise :

En reliant les points d'équilibre E_1, E_2 et E_3, on obtient le sentier d'expansion OS de l'entreprise (voire la figure).

- Le sentier d'expansion est une droite passant par l'origine dont l'équation est de la forme K = a.L. la valeur de la pente ($a = \frac{K}{L}$) peut être calculée à partir des coordonnées de l'un des points de la droite OS. Au point E_1 (40, 40), on obtient :

$a = \frac{K}{L} = \frac{40}{40} = 1 \Rightarrow$ l'équation du sentier d'expansion est donc K = L.

- En chaque point de cette droite, l'égalité suivante est vérifiée :

$a = \frac{K}{L} = 1 = TMST_{LK} = \frac{PL}{PK} = \frac{PmL}{PmK}$.

- Le sentier indique que le rapport de quantités utilisées de facteurs ($\frac{K}{L}$) n'est pas modifiée quand l'entreprise accroît sa production en même temps que sa taille.

h- Le rendement d'échelle :

- Le rendement d'échelle exprime le rapport entre l'accroissement proportionnel des facteurs de production et l'accroissement induit da la production.

- On a : $PT = \sqrt{K.L}$ = a.PT = $a\sqrt{K.L}$.

Le produit total lui-même multiplié par le constant « a », la fonction de production est homogène linéaire et les rendements d'échelle sont constants.

La dernière figure met en évidence ce résultat :

* Considérons le passage du produit total d'équilibre E_1 au E_2, le long du sentier OS. La quantité employée de chacun des deux facteurs a été multipliée par 1,5 et le volume de production également.

Pour E_1 : $L = K = 40$ et $PT = 40$ et ;

Pour E_2 : $L = K = 40 \times 1{,}5 = 60$ et $PT = 40 \times 1{,}5 = 60$.

La production augmente donc dans la même production que les facteurs.

* De même, pour le passage du point E_1 au point E_3 :

Pour E_1 : $L = K = 40$ et $PT = 40$ et ;

Pour E_3 : $L = K = 40 \times 2 = 8$ et $PT = 40 \times 2 = 80$.

